CORSO ZERO
di Matematica
CdL Scienze biologiche
Lezione 1

Nozioni Insiemistiche

Un insieme è un concetto primitivo,

possiamo vedere un insieme come la collezione di oggetti

Sia A un insieme

"$a \in A$" (a è un elemento dell'insieme A)

$\in$ = <u>appartiene</u>

Per descrivere un insieme abbiamo due modi

1. elencare gli elementi dell'insieme

es. $A = \{2, \sqrt{3}, 4, 6\}$

2. attraverso una proprietà caratteristica

dell' insieme

es. $A = \{$ studenti che hanno matricola con ultima cifra pari $\}$

<u>Attenzione</u>: la proprietà che descrive l'insieme non deve essere ambigua

<u>es</u> $A = \{$ studenti bravi $\}$

<u>es</u> $A = \{$ insieme dei numeri interi pari $\}$

poi y

$$= \{ 2n \;:\; n \in \mathbb{N} \}$$

" : " = tale che

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali

0, 1, 2, 3, 4 . . . .

Operazioni insiemistiche

1. $\emptyset$ = insieme vuoto (non contiene

elementi)

Dati due insiemi A e B

2. $A \subseteq B$ (A è contenuto in B)

ossia: ogni $x \in A$ è elemento di B

ossia:

$$\forall x \in A \implies x \in B$$

($\forall$ = per ogni $\implies$ si ha (oppure implica

Principio di doppia inclusione:

Siano A e B due insiemi. Allora

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

$A=B$ significa che gli insiemi A e B hanno gli stessi elementi

$\iff$ = se e solo se

Operazioni di unione e intersezione

$$A \cup B = \{x : o\ x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

dalla definizione di unione, si ha

$$A \subseteq A \cup B$$

$$B \subseteq A \cup B \quad , \quad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ e } x \in B \}$$

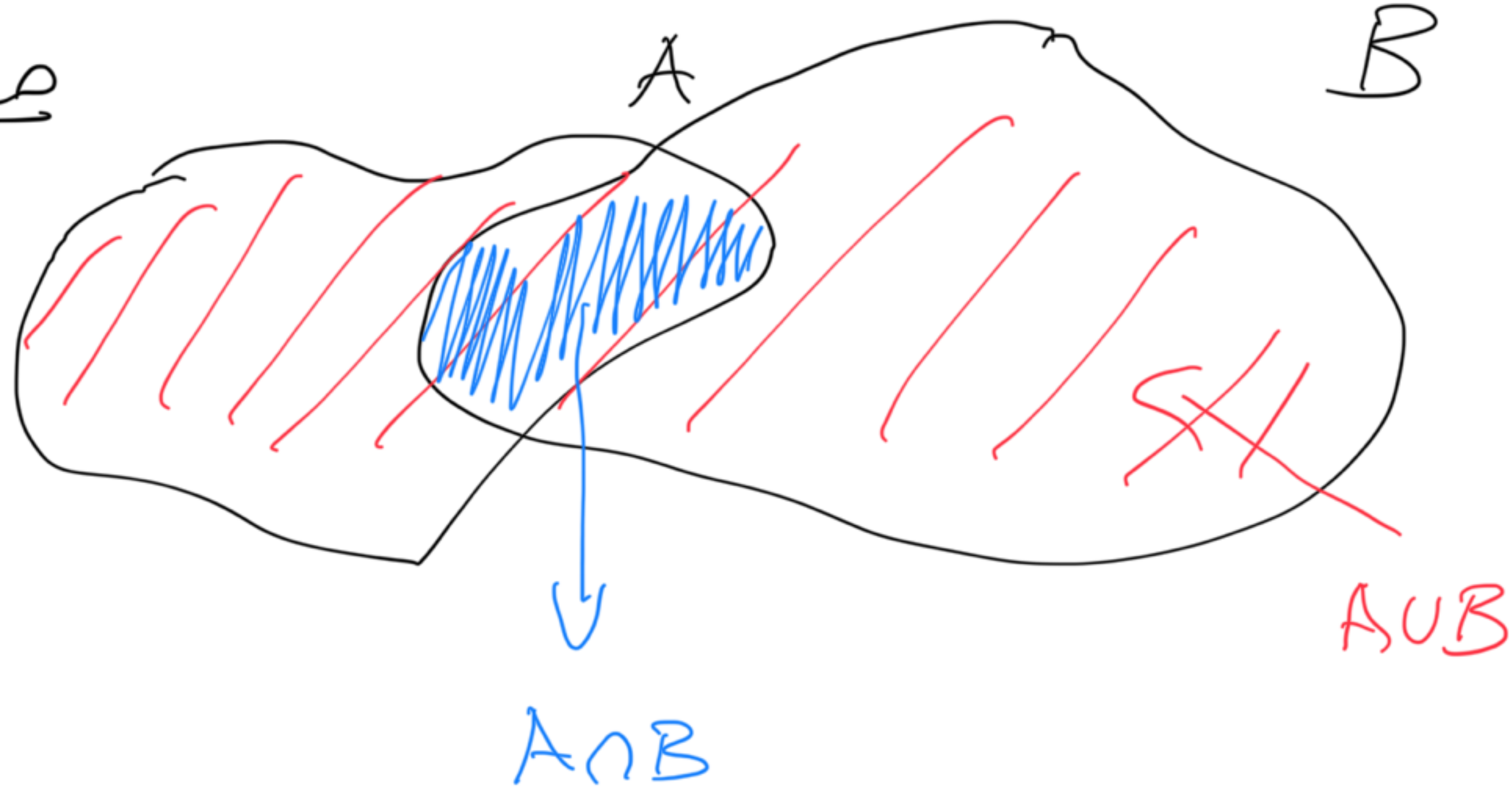
elementi che appartengono sia all'insieme A che all'insieme B

<u>si ha</u>:

$$A \cap B \subseteq A$$

$$A \cap B \subseteq B$$

Esempio



Esempio

$$A = \{2, 4, 3, 10\}$$

$$B = \{4, 5, 7, 10\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 10\}$$

$$A \cap B = \{4, 10\}$$

- <u>sottrazione</u> <u>insiemistica</u>

siano A e B due insiemi

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ma } x \notin B\}$$

$\notin$ = non appartiene

$A \setminus B$ sono tutti gli elementi di A che non stanno in B

Esempio

Esempio

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 7\}$$

$$A \setminus B = \{3, 5\}$$

$$B \setminus A = \{4, 6\}$$

Proprietà: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

Insiemi Numerici

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$$

$\mathbb{N}, +$

$$n + m = n + \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{m\text{-volte}} \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}$ non è chiuso rispetto all'operaz.

di sottrazione

$$n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow n - m \in \mathbb{N} \,?$$

$$2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$$

insieme degli <u>interi</u> <u>relativi</u>

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$$

$$= \{\pm n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$= \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, -4 \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto alle operazioni

$+ , \ -$

Operazione prodotto:

$n, m \in \mathbb{N}$

$$n \cdot m = \underbrace{n + n + \dots + n}_{m \text{ volte}}$$

se $n, m \in \mathbb{Z}$ nel prodotto vale la regola dei segni

$$n \cdot m = \begin{cases} +p & \text{se } n \text{ e } m \text{ sono concordi} \\ -p & \text{se } n \text{ e } m \text{ sono discordi} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} "+ \cdot + = +" \\ "- \cdot - = +" \end{array}\right\} \text{concordi (stesso segno)}$$

$$"+ \cdot - = -" \quad \text{discordi}$$

" $- \cdot + = -$ " $\Big\}$ (segni opposti)

Es

$$(+2)\cdot(+5) = 10$$

$$(-2)\cdot(-5) = +10$$

$$2 \cdot (-5) = -10$$

$$(-2)\cdot 5 = -10$$

$\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto all'operazione di ·

Operazione <u>divisione</u>

$$\frac{6}{2} = 3 \quad \left(\text{perché } 3 \cdot 2 = 6 \right)$$

$$\frac{n}{m} = p \quad \text{tale che} \quad p \cdot m = n$$

<u>Es</u> $\frac{7}{4} \notin \mathbb{Z}$

Insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \; ; \; n \in \mathbb{Z}, \; m \in \mathbb{N}, \; m \neq 0 \right\}$$

condizione nella divisione:

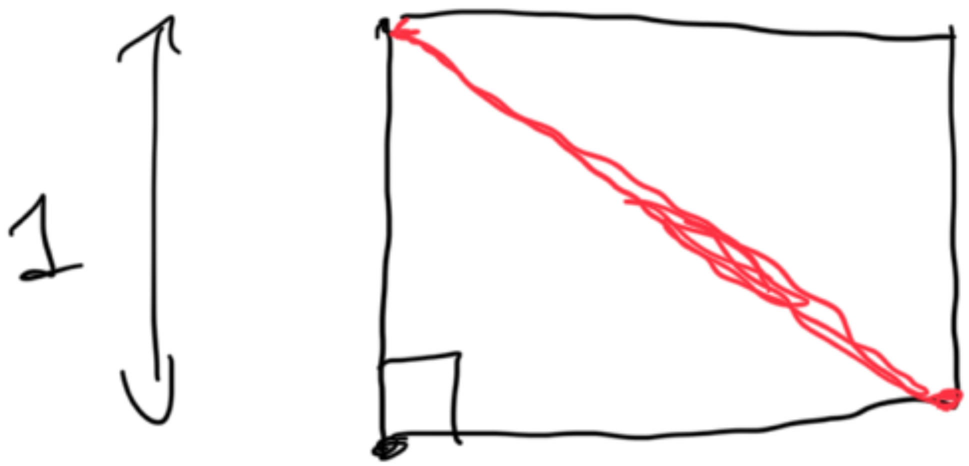
Ovviamente

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

In $\mathbb{Q}$ hanno senso tutte le

operazioni algebriche $+, -, \cdot, :$

Con Pitagora si riesce a misurare la diagonale di un quadrato



la diagonale misura $\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$? NO

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$? NO

$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Rappresentazione decimale di un numero razionale

$$\frac{7}{4}$$

$$7 \;\; \underline{|\;4\;}$$

$$\begin{array}{r|l} \underline{7} & 1,7\ldots \\ 30 & \\ \underline{28} & \\ 20 & \\ \ldots & \end{array}$$

<u>ossia</u>

$$\frac{n}{m} = \pm M, c_1 c_2 c_3 \ldots$$

$$\pm M \in \mathbb{Z}$$

$$c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

Es $\quad 0,2 = \frac{2}{10}$

$$9,31 = \frac{931}{1\underbrace{00}}$$

tanti zeri quante sono le cifre dopo la virgola

$$1,\overline{2} = 1,222222\ldots\ldots 2\ldots$$

rappresentazione decimale infinita

periodico –

$$1,\overline{2} = \frac{12-1}{9} = \frac{11}{9}$$

tanti 9 quante sono le cifre sotto il periodo

$$1,2\overline{8} = 1,288888 \ldots - 8 \ldots$$

cifre periodo

antiperiodo

$$1,2\overline{8} = \frac{128 - 12}{90}$$

tanti 9 quante sono le cifre sotto periodo

tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo

come si spiega?

$$1,\overline{2} = \frac{12-1}{9}$$

$$x = 1,\overline{2} = 1,222\ldots$$

$$10 \cdot x = 12,222\ldots$$

$$10x - x = 12 - 1$$

$$9x = 12 - 1$$

$$x = 12 - 1$$

$$x = \frac{\quad}{9}$$

<u>Es</u> $x = 1,2\overline{8} = 1,2888\ldots 8\ldots$

$$100 \cdot x = 128,\underbrace{888\ldots 8}$$

$$10 \cdot x = 12,\underbrace{888\ldots}$$

$$100x - 10x = 128 - 12$$

$$90x = 128 - 12$$

$$x = \frac{128 - 12}{90}$$

<u>Proprietà</u> :

In ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$, la rappresentazione decimale di q è

o finita

oppure infinita periodica

Da questa proprietà si arriva a definire l'insieme dei numeri reali

$$\mathbb{R} = \{ \pm n, c_1 c_2 c_3 \ldots c_p \ldots \}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Ordinamento su $\mathbb{R}$

(•) ordinamento lessico - grafico

siano $x, y \in \mathbb{R}$

$$x = M, C_1 C_2 C_3 \ldots$$

$$y = N, D_1 D_2 D_3 \ldots$$

se $M < N$ allora concludo

$$x < y$$

altrimenti, se $\boxed{M = N}$

allora se $C_1 < D_1$ allora
concludo $x < y$
altrimenti se $\boxed{C_1 = D_1}$

allora se $C_2 < D_2 \Rightarrow x<y$
altrimenti iteriamo tale procedim.

<u>Esercizio</u> Ordinare i seguenti
numeri:

$$x_1 = 2,\overline{722} = 2,722722722\ldots$$

$$x_2 = 2,72$$

$$x_1 > x_2$$

$$x_3 = 2,\overline{7} = 2,77777\ldots$$

$$x_3 > x_2$$

$$x_4 = \frac{25}{9} = 2,\overline{7}$$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 9 \\ \hline 18 & 2,7 \\ \hline 70 & \\ 63 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

Concluo: $x_4 = x_3 > x_1 > x_2$

Esempio

$$x_1 = 3,14$$

$$x_2 = -\frac{12}{7}$$

$$x_3 = \frac{5}{8} = 0,625$$

$$x_4 = 0,1\overline{3} = 0,1333\ldots$$

Calcolo

$$\begin{array}{l|l} 50 & 8 \\ \hline \underline{48} & 0,625 \end{array}$$

Intervalli in $\mathbb{R}$

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

$$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x \leq b \}$$

Nota $\quad a, b \in [a,b]$

Intervallo chiuso di estremi a e b

$$[a,b[\; = \{ x \in \mathbb{R} : \; a \leq x < b \}$$

ossia $\quad b \notin [a, b[$

mentre $\quad a \in [a, b[$

$[a, b[$ intervallo chiuso in a e aperto in b (di estremi a e b)

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Infine

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$]a, b[$ intervallo aperto di estremi

a e b

$$]a, +\infty[\; = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$[a, +\infty[\; = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$]-\infty, a[\; = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

Raccoglimento a fattori comuni

Raccoglimento a fattori comuni

(•) $4x^3+8x^2+32x =$

$$= x\,(4x^2+8x+32)$$

$$= \underbrace{4x}_{1^\circ \text{ grado}}\,(\underbrace{x^2+2x+8}_{2^\circ \text{ grado}})$$

(•) $(x+a)(x-2a) - (x-2a)(x+3a) =$

$$= (x-2a)\,\big((x+a)-(x+3a)\big)$$

$$= (x-2a)\left(\cancel{x}+a-\cancel{x}-3a\right)$$

$$= (x-2a)\cdot(-2a)$$

(e) $(x-y)^2 + x^2 - y^2$

<u>Osservazione</u>: $(x-y)^2 = (x-y)(x-y)$

$$= x^2 - xy - xy + y^2$$

$$= x^2 - 2xy + y^2$$

mentre :

$$\boxed{(x-y)(x+y) = x^2 - y^2}$$

possiamo svolgere

$$(x-y)^2 + (x^2-y^2) =$$

$$= \underline{(x-y)}(x-y) + \underline{(x-y)}(x+y)$$

$$= (x-y)\left[(x-y)+(x+y)\right]$$

$$= (x-y)\,(x-\cancel{y}+x+\cancel{y})$$

$$= 2x(x-y)$$

Prodotto Notevole:

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$